Filtre à réponse impulsionnelle finie

D'après Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximale du signal.

Transformée en Z :

1/z exprime un retard. D'après le théorème de convolution, la sortie vaut la somme des réponses impulsionnelles : $s(z) = e(z).h(z)$.

Dérivateur

$S = \Delta E$ permet d'avoir la dérivée.
Si on veut $S = j\omega\tau E$ avec τ = constante de temps du dérivateur, il suffit de prendre l'équation différentielle correspondante ($S = \tau dE/dt$) et de la traduire par $S = \tau \Delta E/Te$...

Somme de N échantillons successifs :

$S = N.H = \Sigma \exp(jn\omega Te)$ pour n variant de -M à M avec $N = 2M+1$ et H la moyenne.

$S = \Sigma \exp(j\omega Te)^n = \{\exp[-j2\pi fMTe] - \exp[j2\pi f(M+1)Te]\} / [1 - \exp(j2\pi fTe)]$

En multipliant haut et bas par $\exp(-j\pi fTe)$:
$S = \{\exp[-j\pi f(2M+1)Te] - \exp[j\pi f(2M+1)Te]\} / [\exp(-j\pi fTe) - \exp(j\pi fTe)]$

$S = \{-2j.\sin [\pi f(2M+1)Te]\} / [-2j.\sin (\pi fTe)]$ donc $S = \{\sin [(2M+1)\pi fTe]\} / [\sin (\pi fTe)]$

Finalement, le résultat est le même pour N pair est vaut $S = \{\sin [N\pi fTe]\} / [\sin (\pi fTe)]$

A la fréquence de coupure Fc, les échantillons couvrent environ une demi période du signal :
$T/2 = NTe$, ou plus précisément pour N assez grand : $Fe = 2,2NFc$.

Le gain H s'annule pour une période complète, donc une fréquence double, puis on observe un rebond de -20% à fréquence triple.

Filtre passe bas optimal

La transformée de Fourier inverse va nous donner la réponse impulsionnelle optimale.

$y(t) = \int X(\omega).\exp(j\omega t)d\omega$

$= 2\pi \int \exp(2\pi jft)df$ pour f variant de -xfe à xfe

$= (-j/t)[\exp(2\pi jxfe.t) - \exp(-2\pi jxfe.t)]$

$= (-j/t)[2j.\sin(2\pi xfe.t)] = 2\sin(2\pi xfe.t) / t$

La liste des coefficients est donnée par y(nTe) :
$Cn = 2\sin(2\pi xfe.nTe)/(nTe)$, soit $Cn = 2\sin(2\pi xn)/(nTe)$

Si x = ½ (Shannon) : $Cn = 2\sin(\pi n)/(nTe)$

Les Cn seront pondérés par une liste de coefficients : $C'n = Wn.Cn$
La fenêtre de Hamming est très utilisée : $Wn = 0,54 + 0,46 \cos (n\pi/N)$

Interpolation temporelle

L'échantillon que l'on veut calculer est : $Yo = A\cos\varphi$.
A1 représente la somme des deux échantillons distants de $\pm\theta$.
A3 représente la somme des deux échantillons distants de $\pm 3\theta$.

$A1=(Y-1)+(Y+1)= A[\cos(\varphi - \theta)+ \cos(\varphi + \theta)]= 2A\cos\varphi.\cos\theta$
$A3=(Y-3)+(Y+3)= A[\cos(\varphi - 3\theta)+ \cos(\varphi + 3\theta)]= 2A\cos\varphi.\cos(3\theta)$

$3A1 + A3 = 2Yo.[3\cos\theta + \cos 3\theta] = 2Yo \times 4\cos^3\theta = 8Yo.\cos^3\theta$

Par ailleurs : $A1^3 = 8Yo^3.\cos^3\theta$. Donc $Yo^2(3A1 + A3) = A1^3$.

Exit Shannon, @22 kHz, on peut avoir les sons purs entre 12 et 20 kHz.