La logique floue

La logique floue traite des valeurs comprises entre 0 et 1, appelées fonctions d'appartenance μ.
Si $\mu_A(x) = 0$, l'élément x n'appartient pas à l'ensemble A. Si $\mu_A(x) = 1$, x appartient à A.
Mais par exemple un homme peut être considéré comme plutôt jeune : μ_J sera entre 0 et 1.
Les opérateurs flous font une opération entre deux variables μx et μy notées plus simplement x et y.

Pour deux ensembles classiques A et B avec A strictement inclus dans B ($A \subset B$), on trouve des éléments x tels que $\mu_A(x) = 0$ et $\mu_B(x) = 1$. Pour des ensembles flous : $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.
Opérateurs ET : Lukasiewicz ⊂ Einstein ⊂ probabiliste ⊂ Hamacher ⊂ Zadeh.
Opérateurs OU : Zadeh ⊂ Hamacher ⊂ probabiliste ⊂ Einstein ⊂ Lukasiewicz.
Ces derniers sont commutatifs, associatifs et croissants de $[0,1]^2$ vers [0,1].

Considérons l'approche probabiliste :

Un tirage au sort par pile ou face donne une probabilité p de 50% d'avoir pile et 50% d'avoir face.
Un deuxième tirage donne la probabilité p' aussi égale à 50%.
La probabilité d'avoir deux « pile » vaut alors p.p' = 25% (pile ET pile).

Si un chasseur a p=30% de succès et un autre p'=40%, combien ont-ils de chance de tuer un lièvre ?

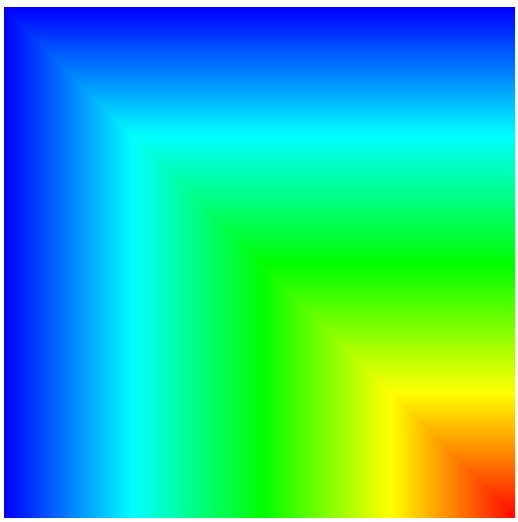
Confronté au 1er chasseur, le lièvre a 1 – p = 70% de chance.
Confronté au 2ème chasseur, le lièvre a 1 – p' = 60% de chance.
Le lièvre a donc une probabilité de (1 – p).(1 – p') de rester en vie.

Les chasseurs ont donc une chance de 1 – [(1 – p).(1 – p')] soit 58%.

Le lièvre sera tué par un chasseur OU par l'autre.
Pour passer du « et » au « ou » et inversement, il suffit donc de remplacer :
x par 1 – x (une variable), y par 1 – y (l'autre variable) et z par 1 – z (le résultat).

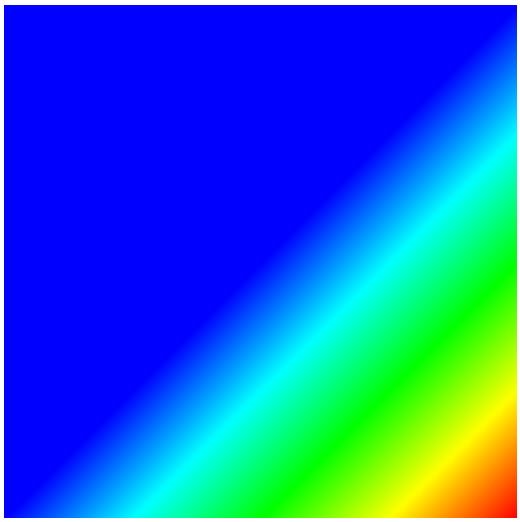
Opérateurs "Et"

Le plus simple des opérateurs traduisant la fonction "Et" est la fonction "Min" (Zadeh) :

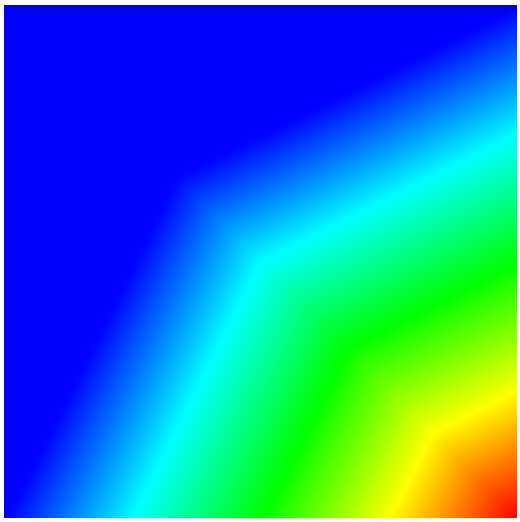


En haut et à gauche, on a 0.a = 0, avec a une variable quelconque comprise entre 0 et 1,
le 0 étant représenté par du bleu. En bas à droite on a 1.1 = 1, représenté par du rouge.
Les couleurs intermédiaires représentent des valeurs comprises entre 0 et 1. 1 - min = neurone.

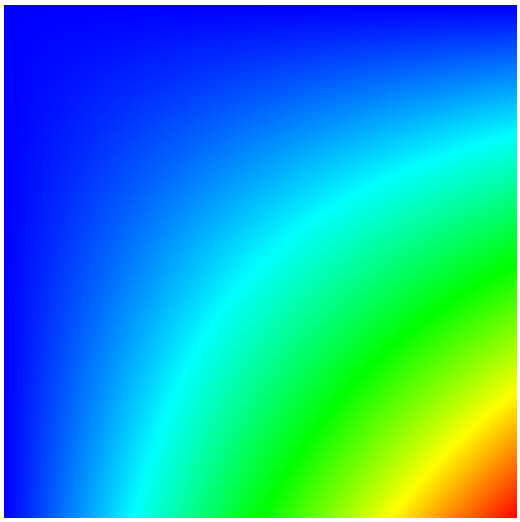
Le « ET » peut également être représenté par Σ - 1 minoré par zéro (Lukasiewicz).



La combinaison des deux : $2z = \max(0 ; \min+\Sigma -1)$



L'opération la plus représentative reste le produit (approche probabiliste) :



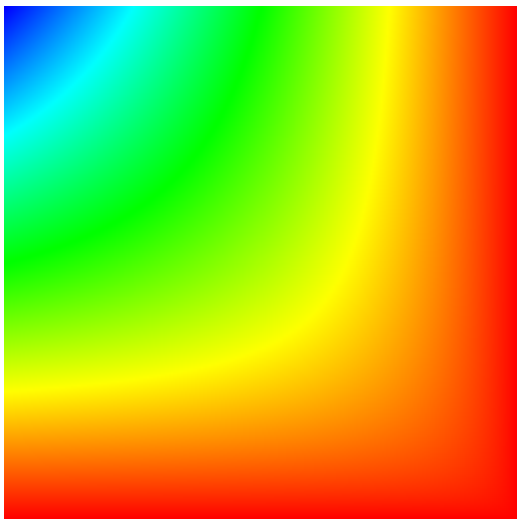
Enfin le ET Einstein: $xy / (2 – x – y + xy)$, le ET Hamacher: $xy / (x + y – xy)$ et majoré: $2xy – (xy)^2$.

Opérateurs "Ou"

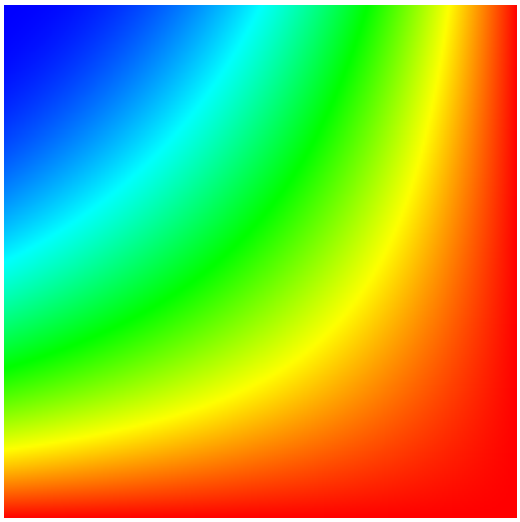
z = (x+y)/(1+xy) (Einstein) :

Le "OU" probabiliste est dérivé du "ET" probabiliste :
D'après De Morgan : (x+y)/ = x/.y/ donc : p = 1 – [(1 – x)(1 – y)].
Ce qui donne p = 1 – [1 – x – y + xy], donc p = x + y – xy

z = (x + y – 2xy) / (1 – xy) (Hamacher) :

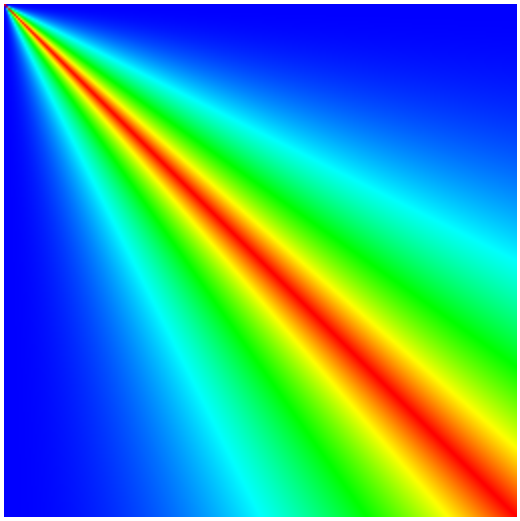


La combinaison de la fonction « max » et de la somme majorée par 1 $\Rightarrow$ 2z = min(2 ; max+Σ).
Le OU majoré : x+y-xy(x+y-xy). Et enfin le OU minoré : $(x+y-xy)^2$:



Corrélations

Ecarts types flous avec Max (0, 1 – 2|Δ|) et [min $(x,y)^2$] / [max$(x,y)^2$] :



Soient deux fonctions f et g. On peux définir une distance d entre f et g telle que $d^2=\int[f(x)-g(x)]^2.dx$
Si d est normalisée ($0 \leq d \leq 1$), 1-d est alors une autre définition possible de la corrélation entre f et g

Implication floue

L'implication a $\Rightarrow$ b est fausse si {la proposition a est vraie et la proposition b est fausse}.
Dans tous les autres cas, l'implication ne sera pas mise en défaut, et sera considérée comme vraie.

Les propositions peuvent être plus ou moins vraies, donc l'implication aussi.
Le but est de quantifier le degré de vérité de l'implication i.

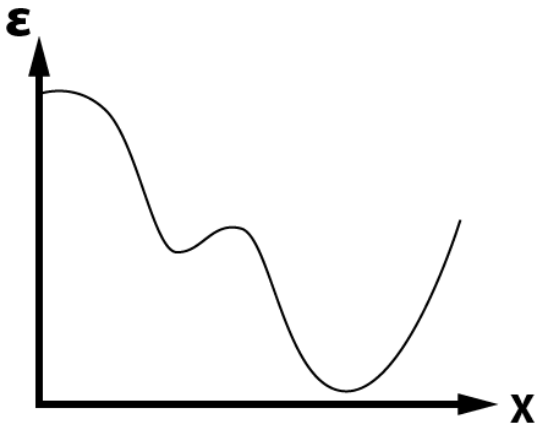
{a vraie et b fausse} $\Rightarrow$ pas vrai. a.(1 – b) = 1 – i (z = x.y avec x = a, y = 1 – b et z = 1 – i)

i = 1 – a + ab (Reichenbach). Ce qui donne le graphe suivant avec a en abscisse et b en ordonnée :

Kleene-Dienes utilise la fonction max.
Il suffit de partir d'un « OU » et de remplacer x par 1 – a et y par b.

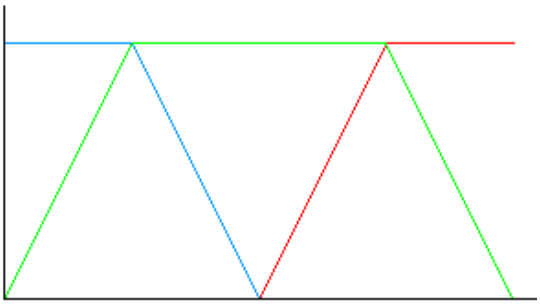
Lukasiewicz donne le graphe suivant :

Descente de gradient



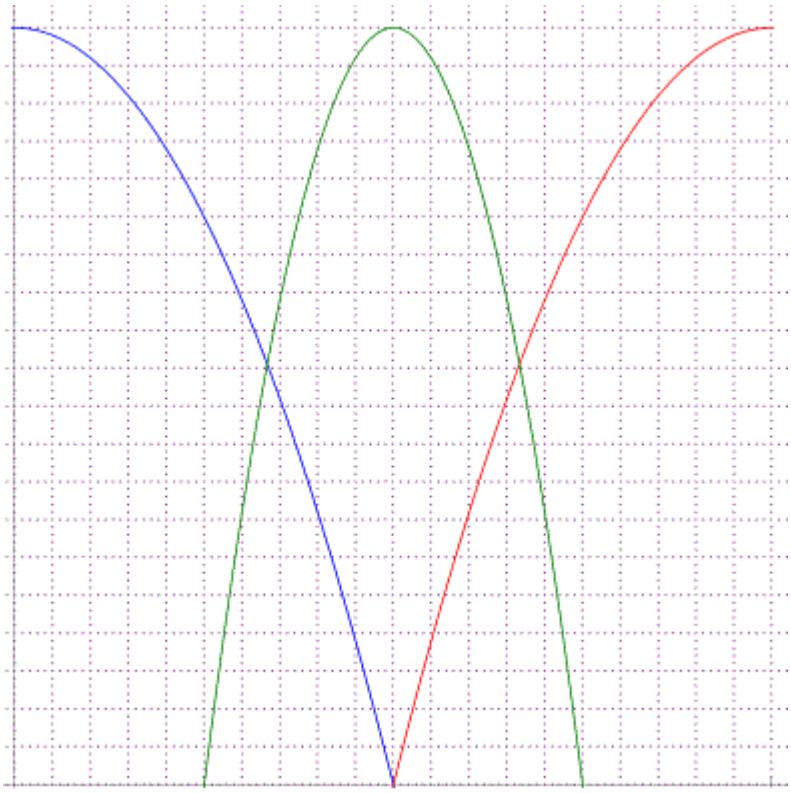
P (pire) = ½ exp (-t/τ) ou P(2) = ½ $(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2$ avec $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$.

Fuzzification



Fuzzification non triviale pour fausses couleurs sur LCD ou mire chewing-gum à led rvb (1 PWM).

Fuzzification pour aide à la décision :



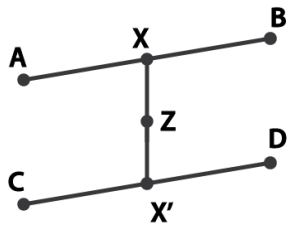
Possibilité et nécessité

Sur un ensemble d'événements Ai, elles sont respectivement notées Π (Ai) et N(Ai).
L'événement A est certain si l'événement contraire est impossible : N(Ai) = 1 - Π (Ai/)

Si à chaque Ai est associée une probabilité P(Ai) : Π (Ai) = max P(Ai).
Ces formules entraînent N(Ai) = 1 – max P(1-Ai) donc N(Ai) = min P(Ai).

Interpolation bilinéaire

Numérique ou analogique, la logique floue est une extension graduelle de la logique classique.
Elle peut être non-linéaire et peut permettre de réaliser un asservissement avec plusieurs capteurs.
Le point fort est le traitement de cas particuliers comme les points singuliers (formes indéterminées)

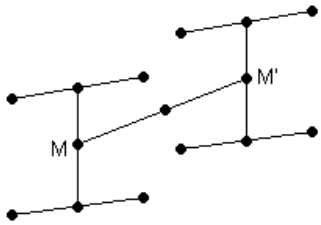


= Défuzzification rapide. Les sommes des fonctions d'appartenance doivent être égales à 100%.
2 MSB (bits de poids fort): première case de 0 à 3. 5 cases avec dernière case à 4.
X' = A+x(B-A) avec x entre 0 et 1 (LSB).
X" = C+x(D-C) avec grille 2x2.
Z = X'+y(X"-X') dans grille 5x5 (après factorisation).

La grille peut être étendue au format 7x7 avec une multiplication par 3 des variables (6+1=7), ou une fuzzification sigmoïdale avec 3 MSB et une demi parabole au début et à la fin (0,1/2/3/4/5/6/7,8). Une grille 9x9 remplie par des octets donne le maximum de précision.

Défuzzification d'une fonction de 3 variables :

En plus des colonnes et des lignes, la 3ème variable sera représentée par des "tranches".
Deux tranches avec chacune 4 valeurs, c'est à dire 8 valeurs.



Pour la première tranche, trois multiplications nous donnent la moyenne pondérée M(x,y).
Pour la seconde tranche, trois multiplications nous donnent la moyenne pondérée M'(x,y).

f(x,y,z) = M + z(M'-M).

Ce qui nous donne un total de 7 multiplications.

Interpolation polynomiale

Cette interpolation est basée sur la formule de Taylor :
$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + ½(x-a)^2 f''(a) + \ldots + (x-a)^n f^n(a)/n!$

L'interpolation est d'autant plus vraie que x est proche de a.

Pour $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$
Pour $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ et $f'''(x) = 6$

Ce qui explique les coefficients.

En remplaçant les dérivées par leur valeur, on peut décomposer une fonction non linéaire en arcs de parabole :

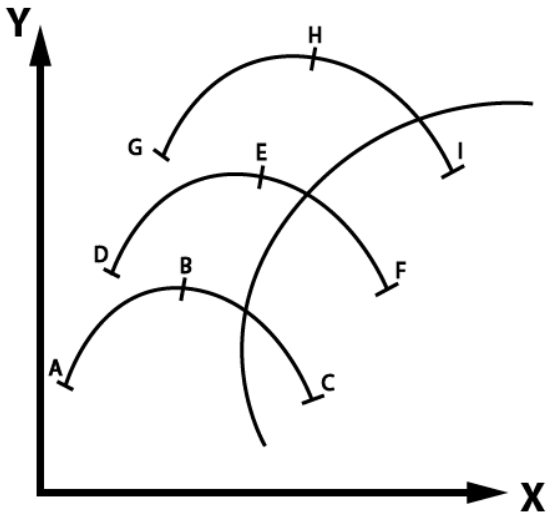
$g(n\tau+t) = g(n\tau) + t\{g[(n+1)\tau] - g[(n-1)\tau]\}/(2\tau) + t^2\{g[(n+1)\tau] - 2g(n\tau) + g[(n-1)\tau]\}/(2\tau^2)$ avec $|t|<\tau/2$

Avec une valeur codée sur 12 bits, on peut faire 16 arcs de 256 points, à partir de 18 valeurs, les valeurs extrêmes ne pouvant être atteintes (sauf dans le cas d'une interpolation temporelle).

Soient 3 valeurs A, B et C. Pour Interpoler autour de B, on aura la valeur :
$B + x[C-A]/256 + x^2[C-2B+A]/2^{15}$ avec x étant une valeur signée sur 8 bits.

Il suffit de complémenter le bit de poids fort de l'octet pour lui donner un signe.
Le principe reste le même pour des polynômes de degré m (m+1 points).

Interpolation trinomiale tridimensionnelle



Soient 9 cases adjacentes dans une grille 9x9 :

ABC
DEF
GHI

On calcule au préalable x^2 et y^2 : 2 multiplications. On interpole pour :

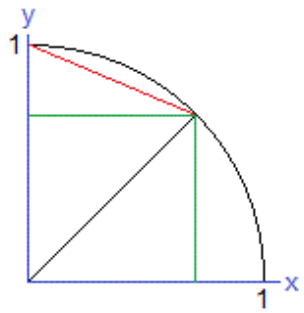
- ABC : 2 multiplications
- DEF : 2 multiplications
- GHI : 2 multiplications

A partir de ces 3 valeurs, on interpole suivant l'axe Y : 2 multiplications supplémentaires.
Ce qui fait un total de 10 multiplications.

Module flou

Grandeur à 2 dimensions

Le module z est tel que $z^2 = x^2 + y^2$. Si on fixe z = 1, on obtient une relation entre x et y: $x^2 + y^2 = 1$.
Le but est de trouver la droite y = ax + b qui soit proche de $x^2 + y^2 = 1$.



Ici y(x) = ax + 1 avec $y(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$

$a/\sqrt{2} + 1 = 1/\sqrt{2}$ donc $a + \sqrt{2} = 1$ donc $a = 1 - \sqrt{2} \approx -0,4$.

Ce qui donne y = 1 – 0,4x soit 2x/5 + y = 1.

Le module z sera donc tel que 5z = 2x + 5y.

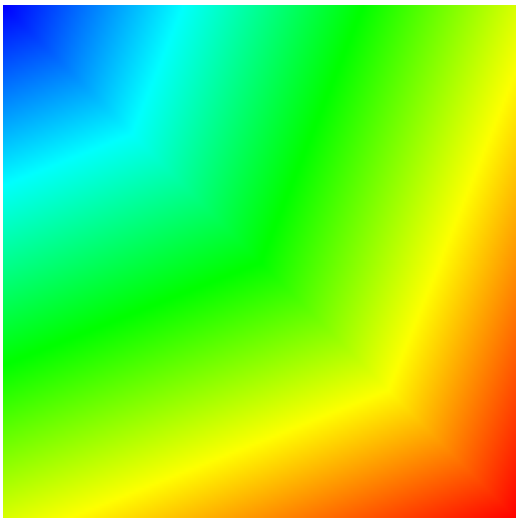
Nous sommes dans le cas y > x donc Max(x,y) = y.

Finalement : 5z = 3.Max(x,y) + 2(x+y).

A un coefficient près, le module sera donc représenté par 3Max + 2∑.
Avec un coefficient de 1/5, on aura 1 pour (0,1) et 7/5 = 1,4 ≈ √2 pour (1,1).

Il ne reste plus qu'à fixer y à 1 et à comparer $5+2x$ à $\sqrt{(1+x^2)}$ pour $x \leq 1$:
Avec un coefficient de 0,194, on obtient une fourchette maximale de ±4%.

Représentation de (3Max + 2∑)/7 (Cas particulier de Werners) :



Grandeur à 3 dimensions

$\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}$ se traduit par :

- 1 pour X=1 et Y=Z=0
- $\sqrt{2}$ pour X=Y=1 et Z=0 (2D)
- $\sqrt{3}$ pour X=Y=Z=1 (3D)

Par extension, on parlera d'une grandeur à x dimensions où x est un réel.
Le module sera donc représenté par $f(x) = \sqrt{x}$ avec x = 3 pour un cube.

On cherche la droite g(x) qui approche f(x). La pente sera donc f ' (2).
$f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ donc $f'(2) = 1/(2\sqrt{2})$.

$g(1) = \sqrt{2} - 1/(2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}/4$
$g(2) = 4\sqrt{2}/4$
$g(3) = \sqrt{2} + 1/(2\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}/4$

Au coefficient $\sqrt{2}/4$ près, on a donc 3 valeurs remarquables :

- h(1) = 3
- h(2) = 4 (2D)
- h(3) = 5 (3D)

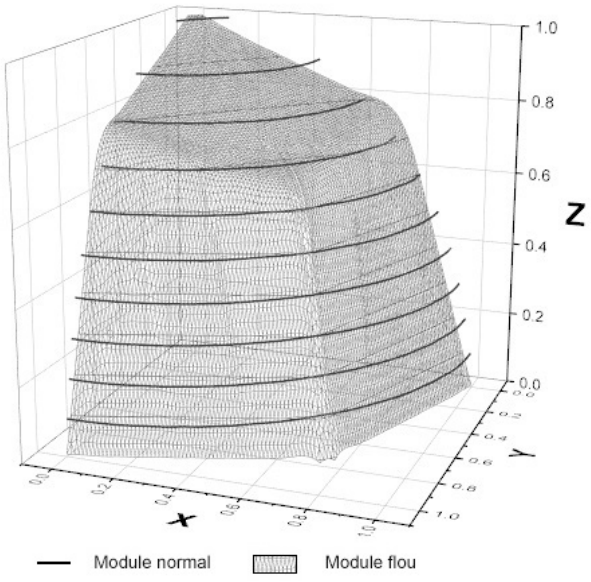
h(n) = 2+n représente donc le module du vecteur dans n dimensions.

Pour (X, Y, Z) = (1, 0, 0) ou (1, 1, 0) ou (1, 1, 1) :

- Max (X, Y, Z) = 1 (constante)
- n = X + Y + Z

A un coefficient près, le module sera donc représenté par $2\text{Max} + \sum$.

Avec un coefficient de 0,33, une simulation sur des millions de variables aléatoires, donne une fourchette maximale de ±8%.



Informatique quantique

L'informatique quantique permet de résoudre en temps polynomial, des problèmes qui demandent un temps exponentiel sur un ordinateur classique, avec un traitement massivement parallèle.

Un peu comme la logique floue, les particules quantiques utilisées pour faire les calculs, se trouvent dans une superposition d'états entre 0 et 1.

A une variable d'entrée (a_0,a_1) correspond la sortie (y_0,y_1). La matrice identité I est la plus simple et ne fait aucune transformation : $y_0 = a_0$ et $y_1 = a_1$. La matrice Not inverse l'entrée : $y_0 = a_1$ et $y_1 = a_0$.

Contrairement à la logique classique, les portes logiques les plus simples sont réalisées à partir de portes compliquées. Mais le principe d'association de portes pour réaliser une fonction est le même.

La deuxième différence est que le calcul doit être réversible. En pratique, il suffit souvent de conserver une ou plusieurs variable(s) d'entrée pour assurer cette réversibilité.

Les portes de base (mais pas simples) sont la porte de Hadamard H et la porte de déphasage Φ.

La porte H donne :

- $y_0 = (a_0 + a_1)/\sqrt{2}$
- $y_1 = (a_0 - a_1)/\sqrt{2}$

Deux portes H en cascade ne changent pas le signal. En effet, le calcul de H^2 donne I.

La porte Φ donne :

- $y_0 = a_0$
- $y_1 = i.a_1$

Ce qui donne naissance a des fonctions inattendues comme la porte SqNot = $\exp(-i\pi/4)\Phi H\Phi$.
On vérifie que $SqNot^2$ = Not. On vérifie aussi que deux portes Φ déphasent de π.

Grâce à deux déphasages contrôlés (déphasage ou pas), on réalise la porte ou-exclusif $a \oplus b$, et toujours avec ces déphasages, la porte de Toffoli : $ab \oplus c$.

Avec une porte ou-exclusif, on réalise la porte non : $a \oplus 1$.
Avec trois portes ou-exclusif, on réalise la porte swap $a \leftrightarrow b$.
Avec une porte de Toffoli, on réalise la porte ET : $ab \oplus 0$.
En utilisant le théorème de De Morgan, on réalise la porte NOR, et ainsi de suite.